Devoir sur Table 5

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(*adapté de Banque PT Maths C 2013*)

Partie I

On considère les fonctions ϕ et ψ, respectivement définies par :

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos(t)}{x}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que, pour tout réel t strictement positif : $\dfrac{|\sin(t)|}{t} \leqslant 1$.
2. Montrer que ϕ et ψ sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit a un réel strictement positif. Étudier la continuité et la dérivabilité de ϕ et ψ sur $[a, +\infty[$.
4. Pour tout réel $x > 0$, comparer $\phi'(x)$ et $\psi(x)$.
5. Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$\phi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

6. Montrer que ϕ a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.
7. Déduire des questions précédentes l'expression de $\phi(x)$ pour tout réel strictement positif x.
8. On admet que ϕ est également définie et continue en 0

   Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$?

Partie II

9. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
   (c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathcal{D}_f$ (on ne calculera pas ici ce développement en série entière).
   (d) Montrer que f est solution sur $\mathcal{D}_f$ de l'équation différentielle :

$$\left(1-x^2\right) f'(x) - x f(x) = 0 \quad (\mathcal{E}_f)$$

10. On recherche le développement en série entière de f sur $\mathcal{D}_f$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

   (a) Donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence entre α_{n+1} et α_{n-1}.
   (b) Pour tout entier naturel p, exprimer α_{2p} et α_{2p+1} en fonction de p.
   (c) Donner le développement en série entière de f.

Exercice 2 Un jeu de société

(*CCINP PC 2023*)

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :
— si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;
— sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I — Préliminaires

1. *Modélisation*

   Dans cette question, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?
   (b) Que représente la variable aléatoire T ?
2. *Calcul de la somme d'une série entière*

   On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

(a) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1 .

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1,1t[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II — Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

3. *Loi des variables aléatoires S_n et T*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

(b) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction des évènements $[S_{k-1} = A-1]$ et $[X_k = 1]$. En déduire que :

$$\mathbb{P}(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

(d) Calculer $\mathbb{P}(T = 0)$.

4. *Espérance de la variable aléatoire T*

On rappelle que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est définie comme la somme de la série entière $\sum_{k \geqslant A} \mathbb{P}(T = k) x^k$ sur son intervalle de convergence.

(a) Déterminer le rayon de convergence R_T de la série entière $\sum_{k \geqslant A} \mathbb{P}(T = k) x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A$$

(b) En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III — Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

5. *Calcul de la probabilité $\mathbb{P}(S_n \leqslant k)$*

Dans cette question, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \qquad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements $([X_{n+1} = 0], \cdots, [X_{n+1} = M-1])$, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(S_n \leqslant k - \ell).$$

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad \mathbb{P}(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}.$$

6. *Espérance de la variable aléatoire T*

   On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite :

   Si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(Z > n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n)$$

   (a) Que peut-on dire des évènements $[T > n]$ et $[S_n < A]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

   (b) En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

On considère les fonctions Φ et Ψ respectivement définies par

$$\Phi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ et } \Psi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\cos t}{x}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout réel t strictement positif $\dfrac{|\sin t|}{t}\leqslant 1$.

   On peut utiliser l'inégalité des accroissements finis ou ce qui revient à peu près au même écrire

   $$|\sin t|=\left|\int_0^t \cos u\mathrm{d}u\right|\leqslant\int_0^t|\cos u|\,\mathrm{d}u\leqslant\int_0^t\mathrm{d}t=t \text{ car } t>0,$$

   d'où le résultat.
2. Montrer que Φ et Ψ sont bien définies sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Définition de Φ.

   Soit $x>0$ fixé. La fonction

   $$\begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{-xt}\sin t}{t}\end{cases}$$

   est continue sur $]0,+\infty[$.

   Au voisinage de 0, on a $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{-xt}\sin t}{t}=1$ donc la fonction précédente est prolongeable par continuité en 0.

   Étudions la fonction au voisinage de $+\infty$. On a pour tout $t\in]0,+\infty[$,

   $$\left|\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right|\leqslant e^{-xt} \text{ d'après II.1.}$$

   On sait que pour $x>0$, $t\mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'où la convergence de l'intégrale définissant $\Phi(x)$.

   Définition de Ψ.

   Soit $x>0$. La fonction

   $$\begin{cases} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{-xt}\cos t}{x}\end{cases}$$

   est continue sur $]0,+\infty[$. De plus pour tout $t\in[0,+\infty[$,

   $$\left|\frac{e^{-xt}\cos t}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x}\times e^{-xt} \text{ d'après II.1.}$$

   On sait que pour $x>0$, $t\mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'où la convergence de l'intégrale définissant $\Psi(x)$.
3. Soit a un réel strictement positif. Étudier la continuité et la dérivabilité de Φ et Ψ sur $[a,+\infty[$.

   Continuité et dérivabilité de Φ.

   Pour simplifier la rédaction, posons

   $$\varphi:\begin{cases} [a,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-xt}\sin t}{t}\end{cases}.$$

   - à $x\geqslant a$ fixé, $t\mapsto\varphi(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après II.3.
   - à $t>0$ fixé, $x\mapsto\varphi(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$.
   - Pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,+\infty[$,

   $$|\varphi(x,t)|\leqslant e^{-xt}\leqslant e^{-at}$$

   Or $t\mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, l'hypothèse de domination est satisfaite.

D'après le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre, on conclut que Φ est continue sur $[a, +\infty[$.

Montrons maintenant que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ (ce qui rend inutile ce qui précède $\mathscr{C}^1 \subset \mathscr{C}^0$).

On applique le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre où les hypothèses suivantes sont vérifiées

- à $x \geqslant a$ fixé, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après II.3.
- à $t > 0$ fixé, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -e^{xt} \sin t$$

Donc

- à $x \geqslant a$ fixé, $t \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue (et intégrable voir ci-après) sur $]0, +\infty[$
- **Hypothèse de domination**

Pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at}$$

Or $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, l'hypothèse de domination est satisfaite.

Continuité et dérivabilité de Ψ.

On va accélérer un peu et montrer directement que Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$.

On peut écrire pour $x \in [, +\infty[$,

$$\Psi(x) = \frac{1}{x} \times \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t \mathrm{d}t$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t \mathrm{d}t$ a été vue maintes fois et est calculable soit avec l'exponentielle complexe soit par double intégration par parties, mais il semblerait (pas sûr) que l'auteur du sujet ne veut effectuer ce calcul qu'à la question II.6.

Jouons le jeu d'appliquer le théorème de dérivation sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t \mathrm{d}t$.

Sans reprendre tout ce qui précède, on pose $\psi(x,t) = e^{-xt} \cos t$ et vérifions l'hypothèse de domination (toutes les autres hypothèses étant vérifiées de manière immédiate)

On a pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) \right| = \left| -te^{-xt} \cos t \right| \leqslant te^{-xt} \leqslant te^{-at}$$

or $t \mapsto te^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car la fonction est prolongeable par continuité en 0 et $te^{-at} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

4. Pour tout réel $x > 0$, comparer $\Phi'(x)$ et $\Psi(x)$.

Indication on pensera à remarquer que $\Psi(x) = \displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_0^X \frac{e^{-xt} \cos t}{x} \mathrm{d}t$ afin de pouvoir intégrer par parties).

On a pour tout $x > 0$ (puis que l'on peut faire varier le réel $a > 0$),

$$\Phi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \mathrm{d}t.$$

Soit $X > 0$, effectuons une intégration par partie sur $\displaystyle\int_0^X \frac{e^{-xt} \cos t}{x} \mathrm{d}t$,

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{e^{-xt}}{x} & \overset{\prime}{\to} & -e^{-xt} \\ \cos t & \overset{\prime}{\leftarrow} & \sin t, \end{array}$$

pour obtenir

$$\int_0^X \frac{e^{-xt} \cos t}{x} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt} \sin t}{x} \right]_0^X + \int_0^X e^{-xt} \sin t \mathrm{d}t$$

$$= \frac{e^{-xX}\sin X}{x} + \int_0^X e^{-xt}\sin t\mathrm{d}t.$$

A $x>0$ fixé, on fait tendre X vers $+\infty$, sachant que

$$\left|\frac{e^{-xX}\sin X}{x}\right| \leqslant \frac{e^{-xX}}{x} \underset{X\to+\infty}{\to} 0,$$

pour obtenir

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\mathrm{d}t = -\Phi'(x)$$

Conclusion $\boxed{\Psi(x) = -\Phi'(x)}$

5. Montrer que pour tout réel strictement positifs x,

$$\Phi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Calculons, si ce n'était déjà fait à la question II.3. $\Psi(x)$.

J'opte pour l'exponentielle complexe, plus rapide à rédiger.

Soit $x>0$.

$$\Psi(x) = \frac{1}{x}\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-xt}\cos t\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^X e^{-xt}\cos t\mathrm{d}t &= \mathrm{Re}\left(\int_0^X e^{(i-x)t}\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^X\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{-x-i}{1+x^2}\left(\underbrace{e^{(i-x)X}}_{\to 0}-1\right)\right)\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{(i-x)X} = 0$ car $\left|e^{(i-x)X}\right| = e^{-xX}$, il vient

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{1}{x}\lim_{X\to+\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{x+i}{1+x^2}\right)\\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Nous avons vu à la question précédente que $\Phi'(x) = -\Psi(x)$, d'où le résultat.

6. Montrer que Φ a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

Nous pouvons facilement majorer $\Phi(x)$. En effet pour tout $x>0$,

$$|\Phi(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

Conclusion $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x) = 0.}$

7. Déduire des questions précédentes l'expression $\Phi(x)$ pour tout réel strictement positif x.

Soit a, x deux réels positifs, nous pouvons écrire

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x \Phi'(u)\mathrm{d}u = -\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan(a) - \arctan(x).$$

Faisons tendre a vers $+\infty$, il vient

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).}$$

8. On admet que
$$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$
Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$?
D'une part
$$\int_0^{+\infty}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,$$
d'autre part
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\mathrm{d}t&=\lim_{x\to 0}\Phi(x)\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right)=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$
Conclusion $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.}$

1 Partie III

Soit $c\in[0,1[$. On pose
$$I(c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-c^2\sin^2 t}}.$$

1. Montrer que $I(c)$ est bien définie.
Rappel $c\in[0,1[$.
La fonction $\left\{\begin{array}{ccc}\left[0,\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2\sin^2 t}}\end{array}\right.$ est bien définie et continue sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ car $0\leqslant c^2\sin^2 t\leqslant c^2<1$.
Ainsi l'intégrale converge en tant que simple intégrale sur un segment.
2. On considère la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   f est définie sur $]-1,1[$.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
   Par composition de fonctions dérivables (en particulier $x\mapsto\sqrt{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$), f est dérivable sur $]-1,1[$ (l'expression sous la racine carrée ne s'annule pas).
   (c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathcal{D}_f$ (on ne calculera pas ici ce développement en série entière).
   On peut écrire pour tout $x\in]-1,1[$,
   $$f(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$
   On sait que la fonction $u\mapsto(1+u)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, donc en posant $u=-x^2$, la fonction f est également développable en série entière sur $]-1,1[$ ($x\in]-1,1[\Rightarrow u=-x^2\in]-1,1[$).
   (d) Montrer que f est solution sur $\mathcal{D}_f$ de l'équation différentielle
   $$\left(1-x^2\right)f'(x)-xf(x)=0\qquad(\mathcal{E}_f)$$
   Calculons. Soit $x\in]-1,1[$.
   $$\begin{aligned}f(x)&=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\\f'(x)&=-\frac{1}{2}\times(-2x)\times\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$= x\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

donc

$$\left(1-x^2\right) f'(x) = x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = xf(x).$$

(e) On recherche le développement en série entière de f sur $\mathcal{D}_f$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

i. Donner pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence entre α_{n+1} et α_{n-1}.

L'énoncé suggère fortement d'utiliser l'équation différentielle précédente même si cela ne semble pas nécessaire car on connaît les coefficients du développement en série entière de $u \mapsto (1+u)^{\alpha}$ ...

Par ailleurs, la fonction f étant paire, on aurait s'économiser les termes impairs...

Écrivons pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{n-1} x^{n-1} \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\alpha_{n+1} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \left(1-x^2\right) f'(x) - xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\alpha_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\alpha_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_{n-1}\right) x^n + \alpha_1 + 2\alpha_2 x - \alpha_0 x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_{n-1}\right) x^n + \alpha_1. \end{aligned}$$

Cette fonction série entière est nulle sur $]-1, 1[$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Il vient, $\boxed{\alpha_1 = 0 \text{ et pour tout } n \geqslant 1,\ \alpha_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\alpha_{n-1}.}$

ii. Pour tout entier naturel p, exprimer α_{2p} et α_{2p+1} en fonction de p.

Puisque $\alpha_1 = 0$, par une récurrence immédiate, $\boxed{\alpha_{2p+1} = 0.}$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \alpha_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \alpha_0 \\ &= \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} \alpha_0 \end{aligned}$$

en rajoutant les entiers pairs en haut et en bas.

Comme $\alpha_0 = f(0) = 1$, il vient

$$\boxed{\alpha_{2p} = \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2}}$$

iii. Donner le développement en série entière de f.

Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} x^{2p}.$$

3. On suppose que
$$I(c)=\sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_{2p}c^{2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}(t)\mathrm{d}t.$$
En utilisant les résultats du I., en déduire l'expression de $I(c)$ sous la forme
$$I(c)=\pi S$$
où S désigne la somme d'une série où les termes $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}(t)\mathrm{d}t$, $p\in\mathbb{N}$ n'apparaissent plus.

D'après la partie I., on a
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{2}J_p\\&=\frac{1}{2}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2p-1)}{2^pp!}\pi\\&=\frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^pp!)^2}\end{aligned}$$
D'où pour $p\geqslant 0$,
$$\alpha_{2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}(t)\mathrm{d}t=\frac{((2p)!)^2}{(2^pp!)^4}\frac{\pi}{2}.$$
Il vient
$$\begin{aligned}I(c)&=\sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_{2p}c^{2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}(t)\mathrm{d}t\\&=\boxed{\frac{\pi}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{((2p)!)^2}{(2^pp!)^4}c^{2p}.}\end{aligned}$$
Passionnant, non ?

Corrigé de l'exercice 2

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. X_n représente l'avancement relatif à l'étape n.
   S_n représente l'avancement absolu (i.e la position) à l'étape n.
2. T représente "le temps d'attente" pour dépasser A, c'est à dire le premier (le plus petit) n tel que $S_n\geqslant A$.

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

3. Montrons par récurrence sur $p\in\mathbb{N}$ que que $f^{(p)}$ existe sur $]-1,1[$ et que
   $\forall x\in]-1,1[,\quad f^{(p)}(x)=\dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$
   Amorce $p=0$. C'est la définition de f.
   Hérédité : Soit $p\in\mathbb{N}$ quelconque fixé, supposons la propriété vraie au rang p.
   On a alors $f^{(p)}$ qui est dérivable sur $]-1,1[$ comme fonction rationnelle à dénominateur non nul, ainsi $f^{(p+1)}(x)=(f^{(p)})'(x)=\dfrac{d}{dx}p!(1-x)^{-(p+1)}=p!(-1)(-(p+1))(1-x)^{-(p+2)}=\dfrac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$
   Conclusion : Par principe de récurrence le résultat est vrai pour tout $p\in\mathbb{N}$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$ "fixé". Posons pour tout $n \geqslant p$, $a_n = \binom{n}{p} > 0$.

   Les coefficients étant > 0 nous pouvons appliquer la règle de D'Alembert sans la variable x pour déterminer R le rayon de convergence : Par expression en factorielles des combinaisons et simplification : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n+1-p} \to +1$ quand $n \to +\infty$. Ainsi $R = \dfrac{1}{1} = +1$.

   Conclusion : le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1.

5. D'abord par DSE usuel, f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

   Ensuite soit $p \in \mathbb{N}$ par théorème de dérivation des séries entières on peut dériver f p fois terme à terme sur l'ouvert de convergence ce qui donne $f^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} p! \binom{n}{p} x^{n-p}$.

   Enfin nous avons l'expression de $f^{(p)}$ obtenue à Q28. il suffit alors de multiplier par x^p et diviser par $p!$ pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

6. Remarquons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \sim \mathcal{B}(1/2)$, S_n apparait donc comme somme de n vad indépendantes suivants toutes une $\mathcal{B}(1/2)$.

   Ainsi, si $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.
7. En prenant la définition de T de l'énoncé :

   Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas :

   Si le procédé s'arrête : $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$ et $T(\omega) \geqslant A$ car "au mieux" on a avancé de $+1$ à chaque fois.

   Si le procédé ne s'arrête pas, (cela peut arriver par exemple lorsque ou tous les X_k renvoient 0) alors $T(\omega) = 0$.

   Ainsi les valeurs prises par la variable aléatoire T sont $\{0\} \cup [\![A, +\infty[\![$.
8. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$.

   Vu qu'ici on ne peut qu'avancer d'un coup ou ne pas bouger à chaque étape,

   $(T = k) = (S_{k-1} = A - 1) \cup (X_k = 1)$.

   Ensuite les évènements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$ sont indépendants (par le lemme des coalitions), donc

   $P(T = k) = P(S_{k-1} = A-1)P(X_k = 1)$ nous connaissons ces lois usuelles , nous avons bien :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

9. Par Q30. $P(T = 0) = 1 - P(T > 0)$. Et $P(T > 0) = \displaystyle\sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \frac{1}{2^k}$

   Nous savons évaluer cette somme grâce à Q30 appliqué à $p = A-1$ et $x = 1/2$.
   $\displaystyle\sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2^{A-1}}{1/2^A}$ au final $P(T > 0) = 1$ et $P(T = 0) = 0$.

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

10. Exploitons ici les résultats obtenus.

La série entière définissant G_T correspond à celle de Q29 mais avec un facteur $\dfrac{1}{2^k}$. Cela assure (sans détails ...) que le rayon de convergence $R_T = 2$, ensuite il suffit d'utiliser la formule de Q30. pour $p = A-1$ en $\dfrac{x}{2}$ ($x \in]-2,2[$ donc $x/2 \in]-1,1[$) qui donne bien

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

11. Le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie est donné par $E(T)$.
Comme $R_T = 2 > 1$,G_T est dérivable en 1, et donc $E(T) = G_T'(1)$.
$G_T'(x) = A(\dfrac{x}{2-x})^{A-1}\dfrac{2}{(2-x)^2}$, ainsi $E(T) = 2A$

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leqslant k)$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales pour le système complet d'évènements $((X_{n+1} = 0), \ldots, (X_{n+1} =$
Soit $k \leqslant A-1$, $P(S_{n+1} \leqslant k) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{M-1} P(S_{n+1} \leqslant k, X_{n+1} = \ell)$
Il suffit alors de constater que :
Il est impossible que $\ell > k$
et que pour $l \leqslant k$, $(S_{n+1} \leqslant k, X_{n+1} = \ell) = (S_n \leqslant k-\ell, X_{n+1} = \ell)$ qui nous ramène à deux évènements indépendants (lemme des coalitions),
enfin $PX_{n+1} = \ell) = \dfrac{1}{M}$,
donnant ainsi $P(S_{n+1} \leqslant k, X_{n+1} = \ell) = P((S_n \leqslant k-\ell, X_{n+1} = \ell) = P(S_n \leqslant k-\ell)\dfrac{1}{M}$
Le résultat est ainsi démontré.
Remarque : J'avais fait en première intention avec la formule des probabilités composées. J'interprète alors un conditionnement ce qui est évitable ici.
Soit $k \leqslant A-1$, $P(S_{n+1} \leqslant k) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} P(S_{n+1} \leqslant k | X_{n+1} = \ell) P(X_{n+1} = \ell)$
$P(S_{n+1} \leqslant k | X_{n+1} = \ell) = P(S_n \leqslant k-\ell)$ et $P(X_{n+1} = M) = \dfrac{1}{M}$
On a bien

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k-\ell).$$

13. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\binom{n+k}{n}$$

Amorce : $n = 1$ $S_1 = X_1$ et X_1 suit une loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$.
Donc $P(X_1 \leqslant k) = \dfrac{k+1}{M}$. Et $\dbinom{k+1}{1} = k+1$.
On a bien l'égalité pour $n = 1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose l'égalité vraie au rang n.

Pour calculer $P(S_{n+1} \leqslant k)$ il suffit d'utiliser H.R dans le résultat de Q37, puis d'appliquer la formule proposée par l'énoncé en début de III.1.

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

14. Les évènements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ **ne sont pas égaux**.

    On a ici $(T > n) \subset (S_n < A)$ ou mieux $(T > n) \cup (T = 0) = (S_n < A)$

    Quand on passe alors au calcul de la somme de la série on voit bien le souci de $P(T = 0)$.

    Voici (je pense) une solution :

    pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(S_n < A) = (S_n \leqslant A - 1)$.

    Je calcule d'abord la somme de la série des $P(S_n \leqslant A - 1)$ qui converge :

    $\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n \leqslant A - 1)$

    Or par Q38. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \leqslant A - 1) = \frac{1}{M^n}\binom{n + A - 1}{n}$.

    Cette formule reste vraie pour $n = 0$, $P(S_0 \leqslant A - 1) = 1$.

    On utilise alors la symétrie des coefficients binomiaux, puis changement d'indice, qui nous ramène à la formule de la Q30. appliqué à $p = A - 1$, $x = \frac{1}{M}$ qui tous calculs faits donne la somme $\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n <= A - 1) = \frac{M^A}{(M - 1)^A}$

    Or $P(T > n) \leqslant P(S_n \leqslant A - 1))$

    Donc la série des $P(T > n)$ CV. Donc l'espérance de T existe grâce à l'énoncé.

    Je dis alors que si $P(T = 0) \neq 0$ la série diverge grossièrement donc $P(T = 0) = 0$,

    donc $P(T > n) = P(S_n < A) = P(S_n \leqslant A - 1)$.

    J'ai fini, il y a bien égalité :

    $$E(T) = \frac{M^A}{(M - 1)^A}$$